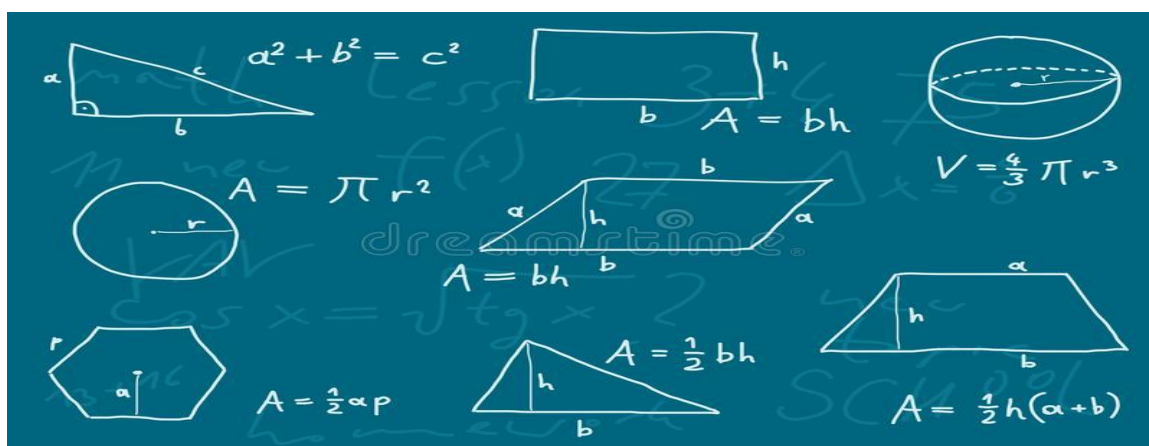


МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ РУССКАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ № 2
г.ТОМСКА

Лебедева ул., д. 92, Томск, 634021, тел.: (3822) 45-19-11, факс: (3822) 45-19-15, e-mail: info@gimn2.tomsk.ru
почтовый адрес: 634021, г.Томск, Лебедева,92

ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА ГЕОМЕТРИИ



ПРАКТИКУМ И ЗАДАЧНИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ ПО ГЕОМЕТРИИ

Работу выполнил: Сухорослов Геннадий
Руководитель: Борисова Наталья Васильевна

Томск

*То, что знаем, - ограничено,
а то, чего мы не знаем, - бесконечно.*

П. Лаплас

Изучая тему «Решение геометрических задач повышенной трудности» при подготовке к итоговой аттестации за курс основной школы и участвуя в различных олимпиадах по математике я увидел, что есть задачи для решения которых мне не хватает знаний школьного курса геометрии. Тогда я поставил перед собой **цель:** научиться решать задачи повышенной трудности по геометрии. Для достижения которой мне помогли следующие **задачи:**

- ✓ - изучить все необходимые теоремы и свойства геометрических фигур необходимые для решения задач;
- ✓ - научиться решать задачи повышенной трудности применяя рациональные методы и приемы решения задач;
- ✓ - обобщить изученный материал и создать практикум и справочник «За страницами учебника геометрии» по решению задач второй части экзамена за курс основной школ, который помог бы мне подготовиться к итоговой аттестации и быть успешным на олимпиадах по математике.

Работа состоит из двух частей:

1 часть Практикума, который содержит решения 12 задач повышенной трудности из банка заданий ФИПИ для подготовке к итоговой аттестации за курс основной школы;

2 часть Задачник, который содержит необходимый теоретический материал для решения данных задач, который мне удалось изучить.

Я очень рад, что решая задачи повышенной трудности мне пришлось изучить теорему Менелая и теорему Чева, свойства медиан и биссектрис треугольника, узнать какая точка называется «инцентром» любого треугольника.

Работа над проектом «За страницами учебника геометрии» помогла мне изучить новый материал и закрепить основные знания по геометрии за курс 7-9 класса. Передо мной открылось много новых и интересных фактов по геометрии, которые надеюсь мне помогут для достижения поставленных задач и цели. И закончить свое вступление хочу словами Дейла Карнеги: *«Успех – это получение того, чего вы хотите. Счастье – это хотеть то, что вы получаете».*

ПРАКТИКУМ

Задачи

1. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 6:13:17. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 18.
2. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK:KM = 6:7$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника ABK .
3. Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 8$ и $MB = 13$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .
4. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 25, 15 и 7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
5. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 34 и 14, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 12$.
6. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 80$, $MD = 64$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .
7. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O под углом α . Точка F принадлежит отрезку AC . Известно, что $BO=10$, $DO = 14$, $AC = 18$. Найдите AF , если площадь треугольника FBC в четыре раза меньше площади четырёхугольника $ABCD$.
8. Углы при одном из оснований трапеции равны 53° и 37° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 6 и 2. Найдите основания трапеции.

9. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 96. Найдите стороны треугольника ABC .

10. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 3$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 94° и 131° .

11. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите AD , если $BC = 18$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 132° и 93° .

12. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 180, а площадь равна 1620, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Решения задач

Задача 1.

Дано:

Треугольник ABC ;

Описанная около $\triangle ABC$ окружность ;

$AB : BC : AC = 6 : 13 : 17$;

$AB = 18$.

Найти: Радиус описанной окружности.

Решение

1) Рассмотрим треугольник ABC , вокруг которого описана окружность с радиусом R . Точки A, B и C лежат на окружности. $AB : BC : AC = 6 : 13 : 17$ (по условию). Сторона $AB = 18$. У нас в условии задачи есть длина стороны треугольника, а также нам нужно найти радиус. В основе этой задачи заложено следствие из теорема синусов. AB известно, тогда $\frac{AB}{\sin C} = 2R$

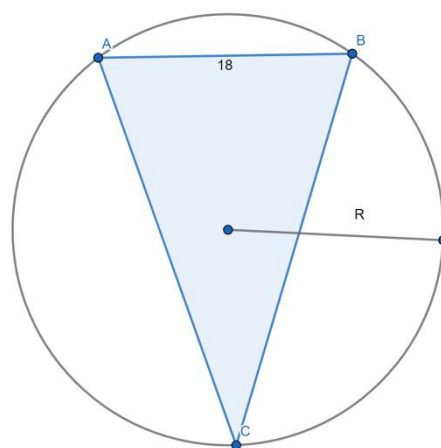
2) Пусть дуга $AB - 6x$, $BC - 13x$ и $AC - 17x$.

Так как градусная мера окружности $= 360^\circ$, то

$$6x + 13x + 17x = 360^\circ$$

$$36x = 360^\circ$$

$$x = 10^\circ$$



3) Дуга $AB = 6 \cdot 10 = 60^\circ$. Угол ACB – вписанный. Вписанный угол = половине дуги, на которую он опирается. Отсюда следует. Что угол $C = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$.

4) По следствию из теоремы синусов: $\frac{AB}{\sin C} = 2R$
 $\frac{18}{\sin 30} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{18}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2R = 36 \Rightarrow R = 18$

Ответ: $R=18$.

Задача 2.

Дано:

$\triangle ABC$;

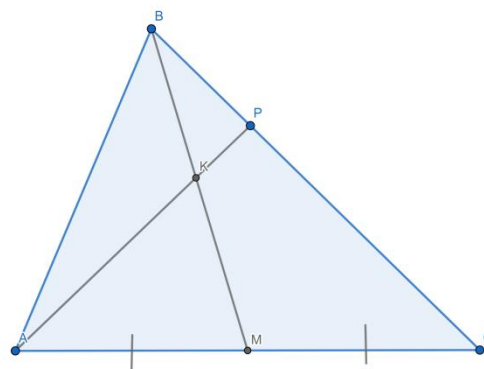
BM – медиана;

$K \in BM$

$BK : KM = 6 : 7$;

AK пересекает BC в точке P

Найти: $\frac{S_{BKP}}{S_{ABK}}$ -?



Решение:

1) Введём обозначения:

Пусть $BK = 6x$ и $KM = 7x$, тогда $BM = 13x$.

Так как BM – медиана, то $AM = MC = y$.

2) Рассмотрим $\triangle BKP$ и $\triangle ABK$. Мы видим, что высота у этих треугольников, проведённая к стороне AP одна и та же. Площади треугольников с общей высотой относятся так, как относятся основания этих треугольников (усл. 1)

$\frac{S_{BKP}}{S_{ABK}} = \frac{BK}{AK}$; $\frac{S_{ABK}}{S_{AKM}} = \frac{BK}{KM} = \frac{6}{7}$; $S_{ABK} = 6x$; $S_{AKM} = 7x$ $= S_{ABM} = 6x + 7x = 13x$.

$\frac{S_{BKA}}{S_{BAM}} = \frac{6x}{13x} = \frac{6}{13}$.

3) Рассмотрим $\triangle MBC$. Существует такая теорема, которая называется теоремой Менелая.

Теорема Менелая: Если на сторонах BM и BC треугольника BMC взяты соответственно точки K и P , а точка A взята на продолжении стороны MC , то точки A , K и P лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$\frac{MK}{KB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CA}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{7}{6} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{2y}{y} = 1$$

$$\frac{14}{6} \cdot \frac{BP}{PC} = 1 \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{3}{7}$$

Тогда $BC = BP + PC = 10$ (частей)

4) Введём обозначения:

Пусть $BP = 3z$, а $PC = 7z$

Получается, что $BC = 10z$.

5) Рассмотрим треугольник ABM , треугольник BMC и треугольник ABC .

Если медиана делит треугольник на два треугольника, то площади этих треугольников равны.

$$S_{ABM} = S_{MBC} = 0,5S_{ABC} \text{ (усл. 2)}$$

$$S_{ABK} = \frac{6}{13} * \frac{1}{2} S_{ABC} \text{ (1 и 2)}$$

6) Площади треугольников с общим или равным углом при вершине относятся, как произведение отношений соответствующих сторон. (усл. 3)

$$\frac{S_{BKP}}{S_{BMC}} = \frac{BK * BP}{BM * BC} = \frac{6 * 3}{13 * 10}$$

$$S_{BKP} = \frac{6 * 3}{13 * 10} * \frac{1}{2} S_{ABC} \text{ (2 и 3)}$$

7)

$$\frac{S_{BKP}}{S_{ABK}} = \frac{\frac{6}{13} * \frac{3}{10} * \frac{1}{2} S_{ABC}}{\frac{6}{13} * \frac{1}{2} S_{ABC}} = \frac{3}{10}$$

Ответ:

$$\frac{S_{BKP}}{S_{ABK}} = \frac{3}{10}.$$

Задача 3.

Дано:

Треугольник ABC;

CM – биссектриса;

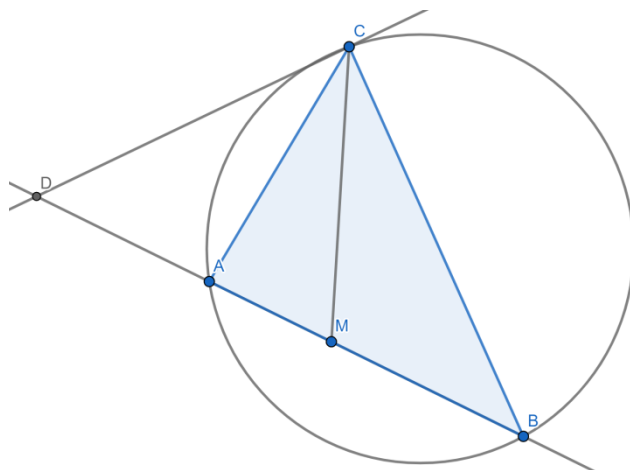
AM=8, MB=13;

Окружность, описанная около

Треугольника ABC;

Касательная проходит через точку C и пересекает AB в точке D.

Найти: DC



Решение:

1) Биссектриса треугольника делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC} \text{ по свойству биссектрисы}$$

2) Если из данной точки проведена касательная и секущая, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению всего отрезка секущей на его внешнюю часть.

$$DC^2 = DA * DB$$

3) Градусная мера угла, образованного касательной к окружности и хордой с концом в точке касания равна половине дуги окружности, заключённой внутри этого угла.

$$\angle DCA = \frac{1}{2} \text{ дуги } AC$$

4) Если вписанный угол и угол, образованный касательной и хордой, высекают на окружности одну и ту же дугу, то они равны.

$$\angle DCA = \angle ABC$$

5) Из 3 и 4 условия следует, что $\angle DCA = \angle ABC = \frac{1}{2} \text{ дуги } AC$

6) Рассмотрим треугольник DCA и треугольник DBC.

Угол D – общий; $\angle DCA = \angle ABC$

Это значит, что треугольник DCA подобен треугольнику DBC по двум углам.

В подобных треугольниках сходственные стороны попарно пропорциональны.

$$\frac{DC}{DB} = \frac{DA}{DC} = \frac{CA}{BC} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{DA}{DC} = \frac{8}{13} \Rightarrow DA = \frac{8}{13} DC$$

$$7) AB = AM + MB = 8 + 13 = 21$$

$$8) \frac{DC}{DB} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow \frac{DC}{DA + 21} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow$$

$$DC^2 = DA * (DA + 21)$$

$$DC^2 = \frac{8}{13} DC * \left(\frac{8}{13} DC + 21 \right)$$

$$\frac{169}{169} DC^2 = \frac{64}{169} DC^2 + \frac{8 * 21}{13} DC$$

$$\frac{105}{169} DC^2 = \frac{8 * 21}{13} DC$$

$$\frac{105}{169} DC = \frac{8 * 21}{13}$$

$$DC = \frac{8 * 21}{13} : \frac{105}{169} \Rightarrow \frac{8 * 21 * 169}{13 * 105} = \frac{8 * 13}{5} = 20,8$$

Ответ: 20,8.

Задача 4.

Дано:

ABCD – параллелограмм;

AC – диагональ;

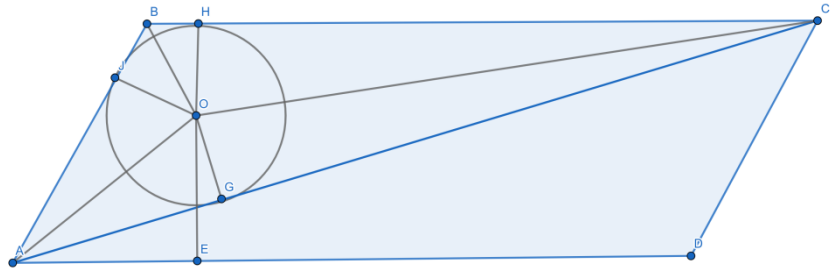
O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC;

Расстояние от A до O = 25;

Расстояние от O до AD = 15;

Расстояние от O до AC = 7.

Найти: Площадь параллелограмма ABCD.



Решение:

1) Расстояние между точкой и прямой это перпендикуляр, опущенный из точки на заданную прямую. Поэтому, OE перпендикулярно AD и OG перпендикулярно AC. OE=15; OG=7.

2) Отрезки OG, OJ, OH равны как радиусы вписанной в треугольник ABC окружности, то есть OG=OJ=OH=7.

3) Пусть O – цент окружности, вписанной в треугольник ABC. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис, поэтому AO, OC, OB – биссектрисы.

Треугольник AOG – прямоугольный, так как OG – перпендикуляр.

По теореме Пифагора, $AO^2 = AG^2 + GO^2 \Rightarrow AG = \sqrt{AO^2 - OG^2}$

$AG = \sqrt{625 - 49} = 24$.

4) отрезки HO и OE выходят из одной точки; HO перпендикулярно BC и OE перпендикулярно AD (Отрезки AB и AD – параллельны, так как противоположные стороны параллелограмма параллельны), отсюда следует HO и OE лежат на одной прямой, отсюда следует HE=HO+OE=15+7=22.

5) AC, AB и BC – касательные к окружности с центром O. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Отсюда следует, OG, OJ и OH перпендикулярны AC, AB и BC соответственно.

6) Рассмотрим треугольники AJO и AOG. Эти треугольники прямоугольные ($\angle AJO = \angle OGA$), $\angle JAO = \angle OAG$ (биссектриса делит угол на два равных угла), AO – общая сторона,

отсюда следует $\triangle AJO = \triangle AOG$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). В равных треугольниках соответственные элементы равны. Отсюда следует, AG=AJ=24 (отрезки касательных, проведенные из одной точки равны).

7) Аналогично из равенства треугольников COH и COG получаем CH = CG, А из равенства треугольников BOJ и BOH JB=ВН.

8) Площадь треугольника ABC можно найти как произведение радиуса вписанной окружности на полупериметр:

$$S_{ABC} = \frac{AB + BC + CA}{2} * OG = \frac{AJ + JB + BH + HC + CG + GA}{2} * OG =$$

$$S_{ABC} = \frac{2AJ + 2BH + 2HC}{2} * 7 = \frac{48 + 2BH + 2HC}{2} * 7 = 7(24 + BH + HC) (*)$$

9) Площадь параллелограмма равна произведению высоты на основание:

$$S_{ABCD} = BC * HE = (BH + HC)(HO + OE) = 22(BH + HC) (**)$$

10) Рассмотрим треугольники ABC и ACD.

AB=CD и AD=BC (противоположные стороны параллелограмма равны)

$\angle ABC = \angle ADC$ (противоположные углы параллелограмма равны)

Отсюда следует треугольник ABC = треугольнику ACD (по двум сторонам и углу между ними).

11) Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма.

Тогда из условий (*) и (**) выразим (BH + HC)

$$7(24 + BH + HC) = \frac{1}{2} * 22(BH + HC)$$

$$168 + 7BH + 7HC = 11BH + 11HC$$

$$168 = 4BH + 4HC$$

$$BH + HC = 42$$

$$12) \text{ Площадь Параллелограмма} = BC * HE = 42 * 22 = 924$$

Ответ: 924.

Задача 5.

Дано:

ABCD – трапеция;

AD=34 BC=14;

$\angle A + \angle D = 90$ градусов;

Окружность проходит через точку A и B и касается CD;

AB=12.

Найти: радиус окружности.

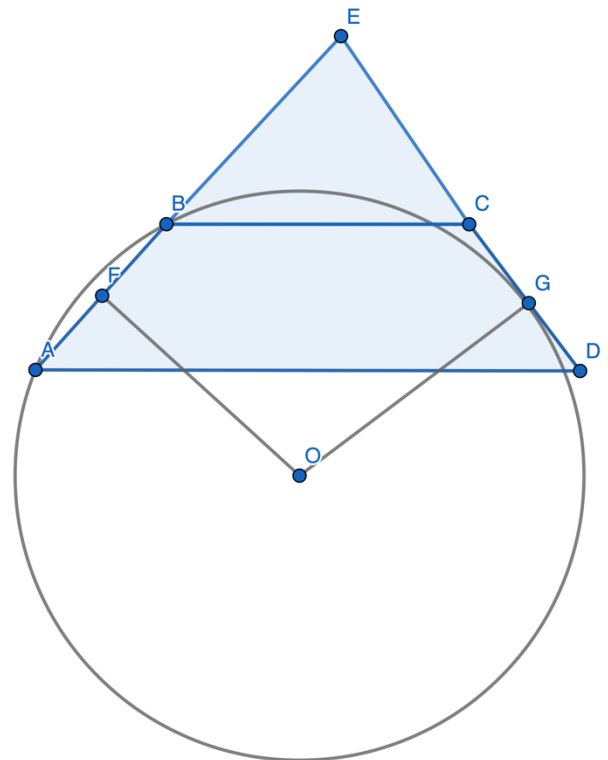
Решение

1) Трапеция – это четырёхугольник, у которого 2 стороны (основания) параллельны, а две другие стороны не параллельны (*). Продлим боковые стороны трапеции ABCD до пересечения в точке E.

2) Рассмотрим треугольник AED.

Сумма углов треугольника равна 180 градусам.

$\angle A + \angle D = 90$ градусов (по условию), тогда $\angle AED = 180 - 90 = 90$ градусов.



3) BE продолжение стороны AB. Это значит, что точки A, E и B лежат на одной прямой. EC продолжение стороны CD. Это значит, что точки E, C, D – лежат на одной прямой. В трапеции ABCD основания BC и AD параллельны (из условия *). Итак, $\angle BAD = \angle EBC$ как соответственные углы при двух параллельных прямых BC и AD и секущей AE.

4) Рассмотрим треугольник AED и треугольник BEC.

Угол E – общий; $\angle BAD = \angle EBC$

Отсюда следует, треугольник AED подобен треугольнику BEC по двум углам.

В подобных треугольниках сходственные стороны попарно пропорциональны. Тогда

$$\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AD}$$

То есть

$$\frac{BE}{BE+12} = \frac{14}{34}$$

Откуда

$$34 BE = 14(BE+12)$$

$$34BE - 14BE = 168$$

$$BE = 8,4 (***)$$

5) Пусть окружность касается прямой CD в точке G, а O – её центр. Опустим из точки O перпендикуляр OF на хорду AB. Точка F – середина AB (перпендикуляр, проведённый из центра окружности к хорде в точке пересечения делит хорду пополам). $AF=FB=0.5AB$ (**)

6) $\angle E = 90$ градусов (из условия 2);

OF перпендикулярно AB (из пункта 5) - это значит, что $\angle OFE = 90$ градусов;

OG – радиус окружности, ED – касательная к окружности. Так как касательная к окружности всегда перпендикулярна радиусу, то $\angle OGE = 90$ градусов

7) Рассмотрим четырёхугольник OFEG. Так как сумма углов в четырёхугольнике равна 360 градусов и

$\angle E = 90$ градусов (из условия 6)

$\angle OFE = 90$ градусов (из условия 6)

$\angle OGE = 90$ градусов (из условия 6)

То

$$\angle FOG = 90 \text{ градусов}$$

А это значит, что четырёхугольник OFEG является прямоугольником.

8) Прямоугольник – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно равны и все углы являются прямыми.

Это значит, что $FE=OG$.

$$FE = FB+BE \text{ а в свою очередь } FB=0.5AB \text{ (из условия (**))} = 0.5*12=6$$

$$FE=6+BE$$

$$BE=8.4 \text{ (из условия ***)}$$

Тогда

$$FE = 6+8.4=14.4$$

Ответ: 14,4.

Задача 6.

Дано:

Остроугольный треугольник ABC;

AB не равно AC;

BC — диаметр полуокружности;

Окружность

пересекает высоту AD в точке M;

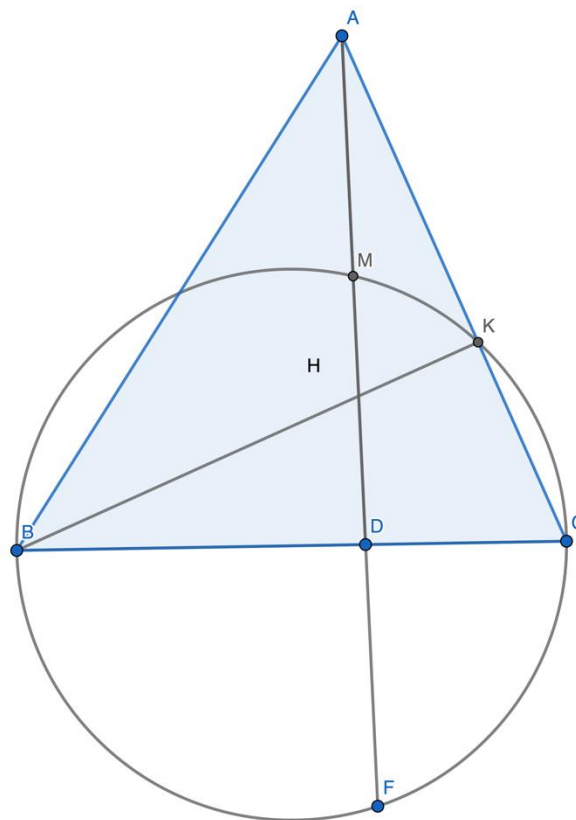
$$AD=80;$$

$$MD=64;$$

H — пересечение высот треугольника ABC;

Найти: AH -?

Решение



1) Продлим полуокружность до всей окружности.

2) Продлим высоту AD до пересечения с окружностью в точке F так, чтобы точки A, M, D, F лежали на одной прямой.

3) $AD=80$ и $MD=64$ (по условию), тогда $AM = AD - MD = 80 - 64 = 16$ (*).

4) Проведём отрезок BK. Получим $\angle BKC$, который опирается на диаметр, или получим треугольник BKC.

Так как BC — это диаметр окружности, то $\angle BKC = 90^\circ$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90°).

5) Так как $\angle BKC = 90^\circ$, то BK — это высота, проведённая к прямой AC.

Высота AD пересекается с высотой BK в точке H.

6) Так как AD — высота, то BC перпендикулярен MF.

Если диаметр перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам.

Это значит, что $MD=DF=64$.

Тогда $AF = AD+DF = 80+64 = 144$ (**).

7) AF и AC — секущие, которые пересекаются в точке A.

Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть.

Получаем, $AM \cdot AF = AK \cdot AC = 16 \cdot 144$ (из условий * и **). Пусть это условие будет (***)

8) Рассмотрим треугольник АКН и треугольник ADC.

$\angle DAC$ - общий;

$\angle AKH = 90^\circ$ (так как ВК - высота) и

$\angle ADC = 90^\circ$ (так как AD - высота)

Отсюда следует треугольник АКН подобен треугольнику ADC по двум углам.

В подобных треугольниках сходственные стороны попарно пропорциональны. Значит,

$$\frac{AK}{AD} = \frac{KH}{DC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AK \cdot AC = AD \cdot AH$$

9) $AK \cdot AC = AD \cdot AH$

$$16 \cdot 144 = 80 \cdot AH$$

$$2304 = 80AH$$

$$AH = 28,8.$$

Ответ: 28,8.

Задача 7.

Дано:

ABCD - четырёхугольник;

BD и AC - диагонали;

BD пересекает AC в точке O под углом альфа;

F принадлежит AC;

BO=10, DO=14, AC=18;

$$\frac{S_{FBC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4},$$

Найти: AF.

Решение

1) Рассмотрим четырёхугольник ABCD.

Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.

$$S_{ABCD} = 0,5 AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot 18 \cdot (BO+OD) \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot 18 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = 216 \sin \alpha.$$

2) По условию задания

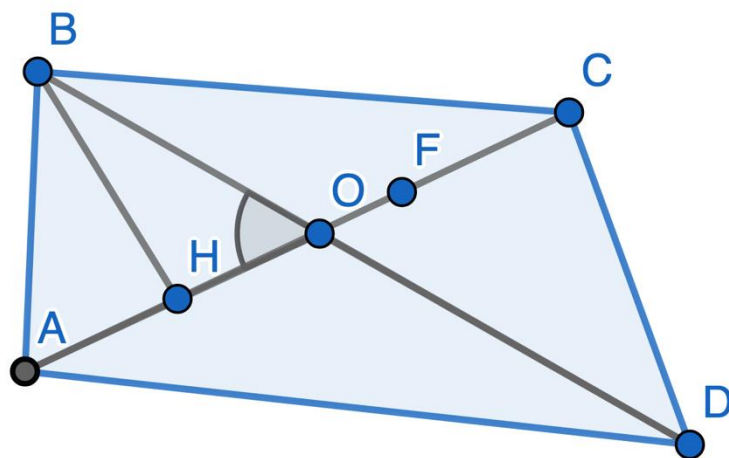
$$\frac{S_{FBC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}. \text{ Тогда } S_{FBC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 216 \sin \alpha = 54 \sin \alpha (*).$$

3) Площадь треугольника FBC можно вычислить по формуле:

$$S_{FBC} = \frac{1}{2} FC \cdot BH$$

4) Пусть FC - x, тогда AF=18 - x.

5) Рассмотрим треугольник BHO, в котором BO = 10 и угол BOH = α .



$$\sin \alpha = \frac{BH}{BO} = \frac{BH}{10}$$

Тогда $BH = 10 \sin \alpha$ (**).

$$6) S_{FBC} = \frac{1}{2} FC * BH$$

$$54 \sin \alpha = \frac{1}{2} FC * 10 \sin \alpha$$

$$FC = 10,8.$$

Следовательно, $AF = AC - FC = 18 - 10,8 = 7,2$.

Ответ: 7,2.

Задача 8.

Дано:

Трапеция ABCD;

$\angle A = 53^\circ$ и $\angle D = 37^\circ$;

$AF=FB$ и $CG=GD$;

$BO=OC$ и $AM=MD$;

$OM=2$ и $FG=6$;

Найти:

Основания BC

и

AD трапеции ABCD

Решение

1) Продлим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке E.

Рассмотрим трапецию ABCD. Трапеция — это четырёхугольник, у которого две стороны (основания) параллельны, а две другие стороны (боковые стороны) не параллельны. FG - отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции; а это значит, что FG - средняя линия трапеции ABCD. Средняя линия трапеции параллельна её основаниям. Это значит, что BC параллельно FG параллельно AD. Так как эти прямые параллельны, то $\angle FAM = \angle BFN = \angle EBO = 53^\circ$

(как соответственные при параллельных прямых AD, FG, BC и секущей AE). Аналогично, $\angle GDM = \angle CGN = \angle ECO = 37^\circ$ (как соответственные при параллельных прямых AD, FG, BC и секущей ED).

2) Рассмотрим треугольник AED. $\angle A + \angle D = 53^\circ + 37^\circ = 90^\circ$.

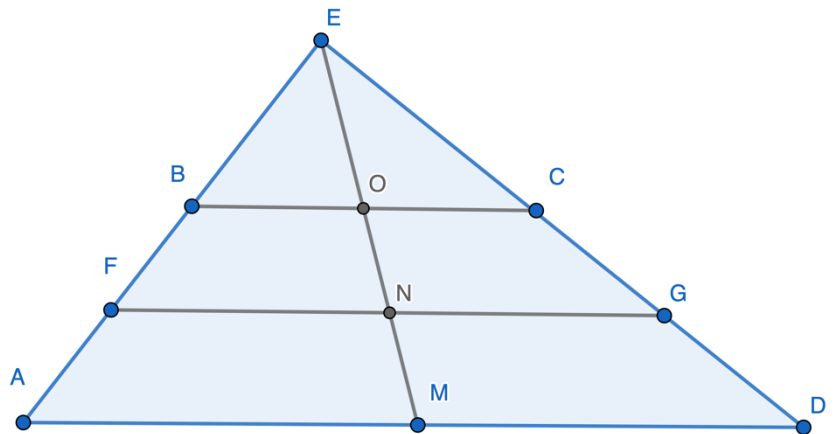
Значит, $\angle E = 90^\circ$. Это значит, что треугольник AED - прямоугольный.

В треугольнике BEC — $BO=OC$, в треугольнике AED — $AM=MD$, тогда в треугольнике FEG — $FN=NG$. Проведём прямую EM. OM - отрезок, соединяющий середины противоположных оснований. Из пункта 2) следует, что EM - медиана прямоугольного треугольника. Медиана в прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы. Отсюда следует, что $EM=AM=MD(*)$.

Аналогично, в треугольнике BEO: $EO=BO$

3) Треугольник AEM - равнобедренный, так как $EM=AM$.

Треугольник BEO - равнобедренный, так как $EO=OB$.



4) Пусть $AD = x$, тогда $AM = EM(*) = 0,5x$; $BC = y$, тогда $BO = EO = 0,5y$.

$$FG = \frac{BC + AD}{2} \text{ (так как } FG \text{ - средняя линия)}$$

$$AM = MO + OE$$

Составим систему

$$\begin{cases} 6 = \frac{x + y}{2} \\ 0,5y + 2 = 0,5x \end{cases}$$

$$(x; y) = (8; 4).$$

$$AD = 8; BC = 4.$$

Ответ: $AD = 8; BC = 4$.

Задача 9.

Дано:

Треугольник ABC ;

BE - биссектриса; AD - медиана;

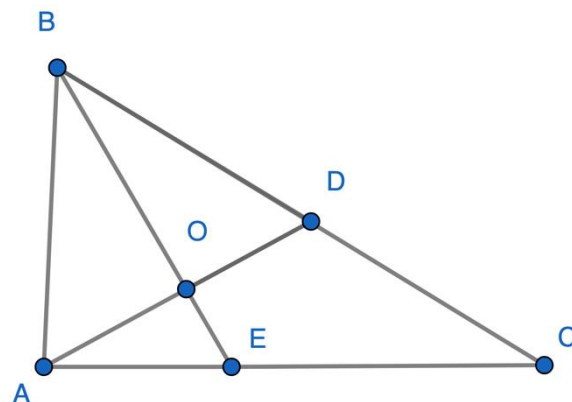
BE и AD перпендикулярны;

$$BE = AD = 96;$$

Найти:

AB, BC, AC .

Решим эту задачу двумя способами:



I способ

Решение

1) Рассмотрим треугольник ABC . BE - биссектриса и AD - медиана.

Рассмотрим треугольник ABO и треугольник BOD .

$\angle ABO = \angle BOD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам (BO - общая, $\angle BOA = \angle BOD = 90^\circ$, $\angle ABO = \angle OBD$ т.к. BE - биссектриса). В равных треугольниках соответственные элементы равны. Отсюда следует, $AO = OD = 48$ и $AB = BD = x$.

$BD = DC = x$ (так как AD - медиана). Тогда $BC = 2x$.

Итак, $AB = BD = DC = x$ и $BC = 2x$.

2) Рассмотрим треугольник ABC .

Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон.

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}; \quad \frac{AE}{EC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Из предыдущего соотношения получаем, что $AE = y$, $EC = 2y$ и $AC = 3y$.

3) Если медиана и биссектриса любого треугольника пересекаются под углом 90 градусов, то в точке пересечения биссектриса делится в отношении 3:1, считая от вершины.

$$\frac{BO}{OE} = \frac{3}{1}$$

Тогда $BO = 72$ и $OE = 24$.

4) В треугольнике ABO по теореме Пифагора $AO^2 + OB^2 = AB^2$
 $48^2 + 72^2 = AB^2$.

Тогда $AB = 24\sqrt{13}$.

$BC = 48\sqrt{13}$ (так как $BC = 2AB$)

5) В треугольнике AOE по теореме Пифагора $AO^2 + OE^2 = AE^2$

$$AE^2 = 48^2 + 24^2$$

$$AE = 24\sqrt{5}$$

$$AC = 3AE = 3 \cdot 24\sqrt{5} = 72\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 24\sqrt{13}$; $BC = 48\sqrt{13}$; $AC = 72\sqrt{5}$.

II способ

Решение

1) Рассмотрим треугольник ABC . BE - биссектриса и AD - медиана.

Рассмотрим треугольник ABO и треугольник BOD .

$\angle ABO = \angle BOD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам (BO - общая, $\angle BOA = \angle BOD = 90^\circ$, $\angle ABO = \angle OBD$ т.к. BE - биссектриса). В равных треугольниках соответственные элементы равны. Отсюда следует, $AO = OD = 48$ и $AB = BD = x$.

$BD = DC = x$ (так как AD - медиана). Тогда $BC = 2x$.

Итак, $AB = BD = DC = x$ и $BC = 2x$.

2) Рассмотрим треугольник ABC .

Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}; \frac{AE}{EC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Из предыдущего соотношения получаем, что $AE = y$, $EC = 2y$ и $AC = 3y$.

3) Найдём длину биссектрисы. Длина биссектрисы угла равна подкоренному выражению, состоящему из разницы произведений прилежащих сторон угла и отрезков, на которые делит биссектриса противоположную сторону.

$$BE = \sqrt{AB \cdot BC - AE \cdot EC} = \sqrt{x \cdot 2x - y \cdot 2y} = \sqrt{2x^2 - 2y^2}$$

4) Найдём длину медианы. Согласно теореме Стюарта, Квадрат медианы равен одной четвертой от суммы удвоенных квадратов сторон, из которой вычли квадрат стороны, к которой проведена медиана. Тогда

$$\text{медиана равна: } AD = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2}$$

$$AD = \frac{\sqrt{2x^2 + 2(3y)^2 - (2x)^2}}{2}$$

5) Составим систему:

$$\begin{cases} BE = \sqrt{AB * BC - AE * EC} \\ AD = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 = \sqrt{2x^2 - 2y^2} \\ 96 = \frac{\sqrt{2x^2 + 2(3y)^2 - (2x)^2}}{2} \end{cases}$$

$$(x; y) = (24\sqrt{13}; 24\sqrt{5}).$$

$$AC = 3y = 3 * 24\sqrt{5} = 72\sqrt{5}.$$

$$AB = x = 24\sqrt{13}.$$

$$BC = 2x = 48\sqrt{13}.$$

Ответ: $AC=72\sqrt{5}$; $AB = 24\sqrt{13}$; $BC = 48\sqrt{13}$.

Задача 10.

Дано:

ABCD - выпуклый четырёхугольник;

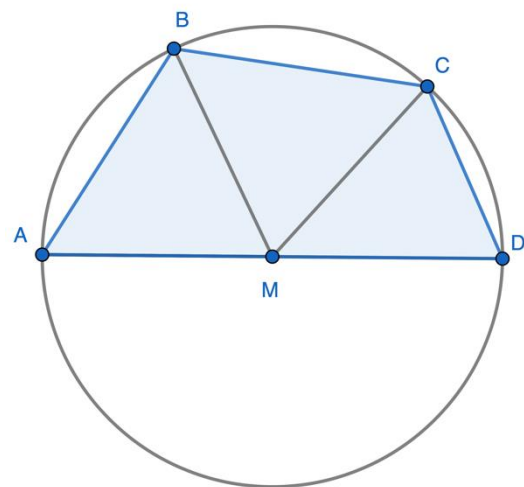
M - середина AD;

AM=MD=MC=MB;

BC=3;

$\angle B = 94^\circ$ и $\angle C = 131^\circ$;

Найти: AD.



Решение:

1) Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Четырёхугольник вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180° .

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow \angle BAD = 180^\circ - 131^\circ = 49^\circ$$

2) Отрезки AM, BM, CM, MD равны как радиусы окружности, поэтому треугольники ABM и BMC — равнобедренные, откуда $\angle BAD = \angle ABM = 49^\circ$.
 $\angle MBC = \angle MCB = \angle ABC - \angle ABM = 94^\circ - 49^\circ = 45^\circ$.

3) Рассмотрим треугольник BMC.

По теореме о сумме углов треугольника, сумма углов треугольника равна 180° , откуда $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

4) Треугольник BMC прямоугольный. По теореме синусов найдём сторону BM из треугольника BMC .

$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Rightarrow \frac{3}{\sin 90^\circ} = \frac{BM}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{BM}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$BM = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,5\sqrt{2}$$

5) AM и MD - радиусы окружности, которые лежат на одной прямой - AD . Так как $AD=2AM$ (на стороне AD находится центр окружности и сторона AD равна двум радиусам), то сторона AD — диаметр описанной окружности.

Поэтому, $AD = 2BM = 2 \cdot 1,5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $AD = 3\sqrt{2}$.

Задача 11.

Дано:

$ABCD$ - выпуклый четырёхугольник;

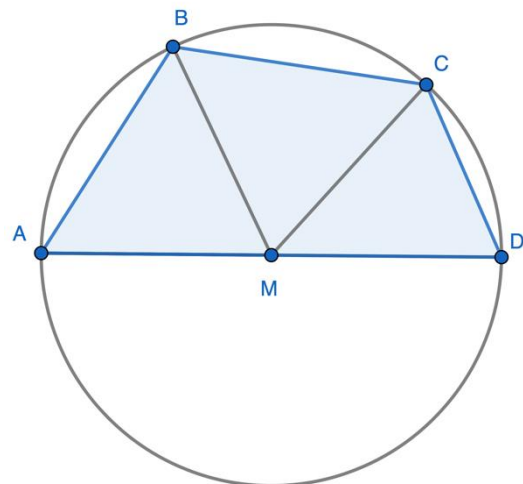
M - середина AD ;

$AM=MD=MC=MB$;

$BC=18$;

$\angle B = 132^\circ$ и $\angle C = 93^\circ$;

Найти: AD .



Решение:

1) Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Четырёхугольник вписан в окружность, следовательно,

суммы противоположных углов равны 180° .

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow \angle BAD = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ$$

2) Отрезки AM , BM , CM , MD равны как радиусы окружности, поэтому треугольники ABM и BMC — равнобедренные, откуда $\angle BAD = \angle ABM = 87^\circ$.
 $\angle MBC = \angle MCB = \angle ABC - \angle ABM = 132^\circ - 87^\circ = 45^\circ$.

3) Рассмотрим треугольник BMC .

По теореме о сумме углов треугольника, сумма углов треугольника равна 180° , откуда $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

4) Треугольник BMC прямоугольный. По теореме синусов найдём сторону BM из треугольника BMC .

$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Rightarrow \frac{18}{\sin 90^\circ} = \frac{BM}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{18}{1} = \frac{BM}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$BM = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

5) AM и MD - радиусы окружности, которые лежат на одной прямой - AD. Так как $AD=2AM$ (на стороне AD находится центр окружности и сторона AD равна двум радиусам), то сторона AD — диаметр описанной окружности.

Поэтому, $AD = 2BM = 2 * 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.

Ответ: $AD = 18\sqrt{2}$.

Задача 12.

Дано:

ABCD - равнобедренная трапеция;

$$P_{ABCD} = 180;$$

$$S_{ABCD} = 1620;$$

В трапецию можно вписать окружность;

AC и BC - диагонали;

Найти: OH

Решение

1) Рассмотрим трапецию ABCD.

Сделаем дополнительное построение.

Проведём высоту HE и CF и BG.

Так как трапеция равнобедренная, то $AB=CD$. Трапеция - это четырёхугольник. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны.

$$AB+CB = BC+AD$$

Так как $AB=CD$, то $2AB=BC+AD$.

$$P_{ABCD} = AB + CD + BC + AD = 2AB+BC+AD=180$$

$$P_{ABCD}=2AB+2AB=180 \Rightarrow P_{ABCD}=4AB=180 \Rightarrow AB=45.$$

2) Следовательно, $2AB=BC+AD=90$.

Площадь трапеции можно найти как произведение полусуммы оснований на высоту.

$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} * HE \Rightarrow HE = \frac{2S_{ABCD}}{BC+AD} = \frac{2*1620}{90} = 36$$

$$HE=36$$

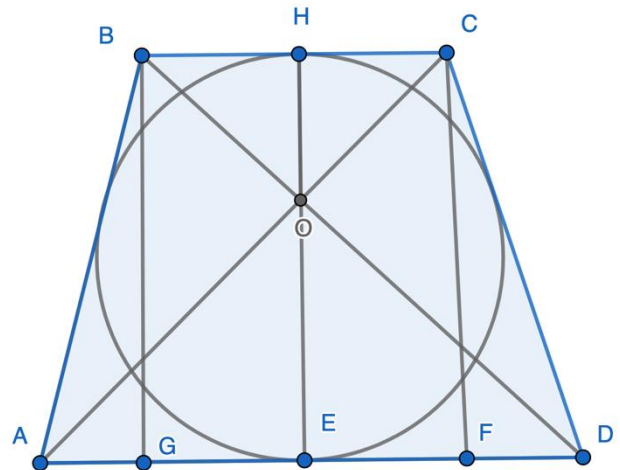
3) $BG=HE=CF$, так как BC параллельно AD; и BG, HE и CF - высоты, проведённые к основаниям трапеции.

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABG. $BG=36$ и $AB=45$.

$$\text{По теореме Пифагора } AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{45^2 - 36^2} = 27.$$

5) Рассмотрим прямоугольные треугольники ABG и FCD. $AB=CD$ и $BG=CF$.

Значит, треугольник ABG = треугольнику FCD по катету и гипотенузе. В равных треугольниках соответственные элементы равны. Отсюда следует, $AG=FD=27$.



6) Рассмотрим четырёхугольник $GBCF$. $\angle BGF = \angle GBC = \angle BCF = \angle CFG = 90^\circ$ (так как HE , CF и BG - высоты). Отсюда следует, что четырёхугольник $GBCF$ - прямоугольник. В прямоугольнике противоположные стороны равны. Значит, $BC = GF$.

$$7) BC + AD = BC + (BC + 2AG) = 90$$

$$BC + (BC + 2AG) = 90$$

$$BC + (BC + 2 \cdot 27) = 90$$

$$BC = 18.$$

$$\text{Тогда } AD = 72.$$

8) Рассмотрим треугольники AOD и BOC .

$$\angle BOC = \angle AOD \text{ (как вертикальные);}$$

$$\angle DAO = \angle BCO \text{ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых } BC \text{ и } AD \text{ и секущей } AC).$$

Значит, треугольник OCB подобен треугольнику OAD по двум углам. В подобных треугольниках сходственные стороны попарно пропорциональны.

Так как HO и OE выходят из одной точки O , находятся между параллельными прямыми BC и AD и пересекают параллельные прямые под одним и тем же углом, то точки H , O , E лежат на одной прямой. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{HO}{OE}$$

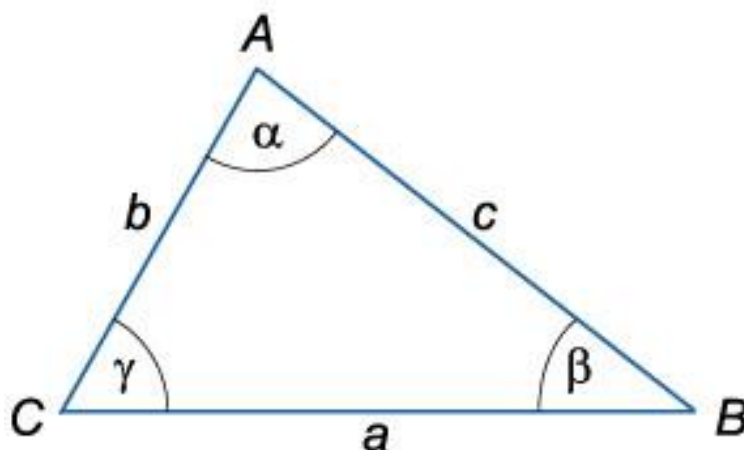
$$\frac{18}{72} = \frac{HO}{OE} \Rightarrow \frac{HO}{OE} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4OH = OE.$$

$$9) \text{ Высота } HE = HO + OE = HO + 4OH = 5OH = 36.$$

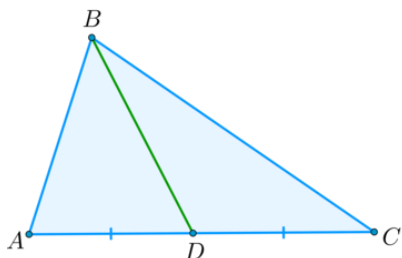
$$\text{Значит, } OH = 7,2.$$

Ответ: $OH = 7,2$.

Треугольник

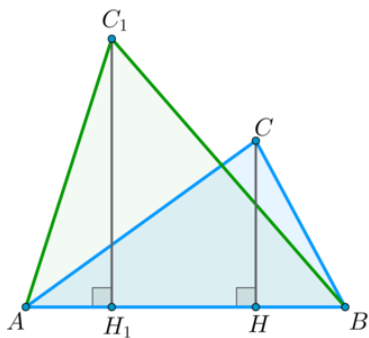


1) Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.



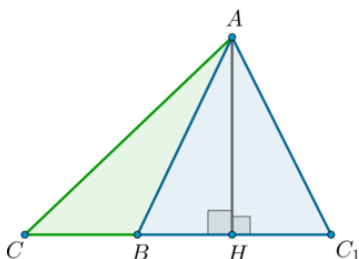
$$S_{ABD} = S_{CBD}$$

2) Площади треугольников с общим основанием относятся как высоты, проведённые к этому основанию.



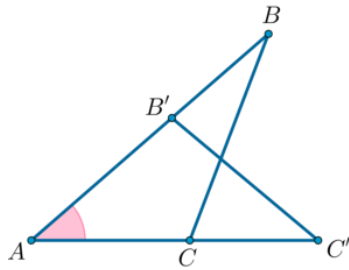
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC_1}} = \frac{CH}{C_1H_1}$$

3) Площади треугольников с общей высотой относятся так, как относятся основания этих треугольников.



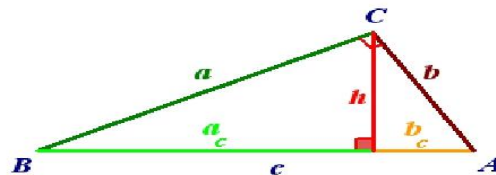
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC_1}} = \frac{BC}{BC_1}$$

4) Площади треугольников с общим или равным углом при вершине относятся так, как произведение отношений соответствующих сторон.



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$$

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



$$a = \sqrt{c a_c} \quad h = \sqrt{a_c b_c} \quad b = \sqrt{c b_c}$$

5) Длина высоты для любого треугольника

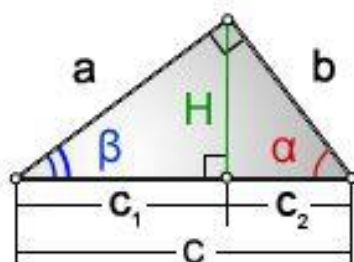
Длина высоты

$$h_a = b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}$$

5.1) Длина высоты в прямоугольном треугольнике

В прямоугольном треугольнике катеты, являются высотами. Ортоцентр - точка пересечения высот, совпадает с вершиной прямого угла.



H - высота из прямого угла

a, b - катеты

c - гипотенуза

c₁, c₂ - отрезки полученные от деления гипотенузы, высотой

α, β - углы при гипотенузе

Формула длины высоты через стороны, (**H**):

$$H = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

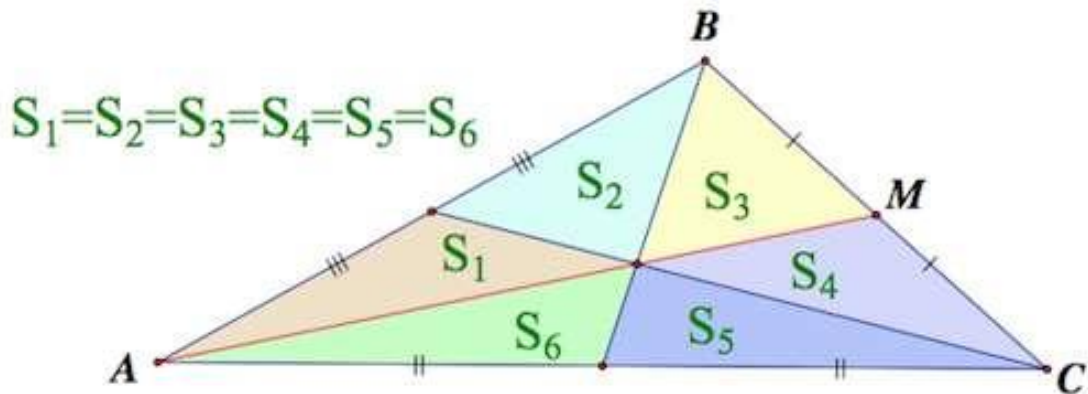
Формула длины высоты через гипотенузу и острые углы, (**H**):

$$H = c \sin \alpha \cos \alpha = c \sin \beta \cos \beta$$

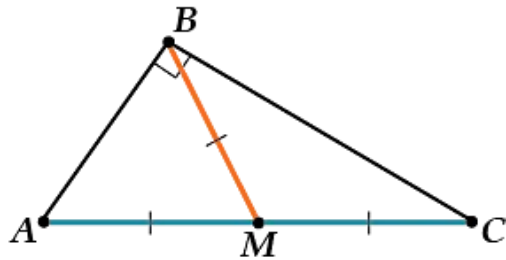
Формула длины высоты через катет и угол, (**H**):

$$H = b \sin \alpha = a \sin \beta$$

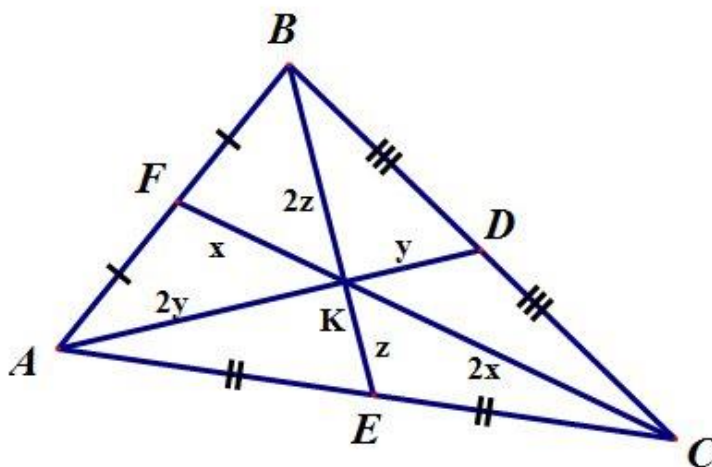
6) Все 3 медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольника



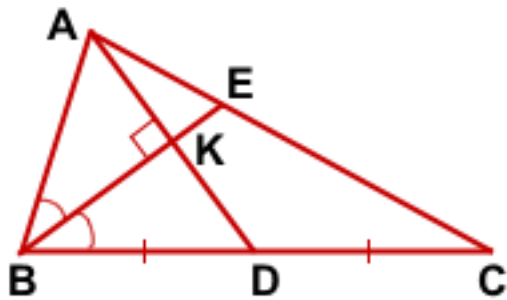
7) Медиана равна половине гипотенузы в прямоугольном треугольнике.



8) Три медианы в любом треугольнике пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.

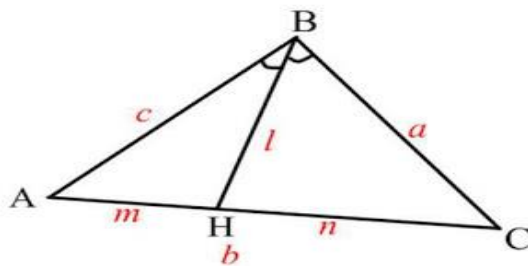


9) Если медиана пересекается с биссектрисой под углом в 90 градусов, то в точке пересечения биссектриса делится в отношении 3:1, считая от вершины.



10) Длина биссектрисы

Формулы длины биссектрисы:

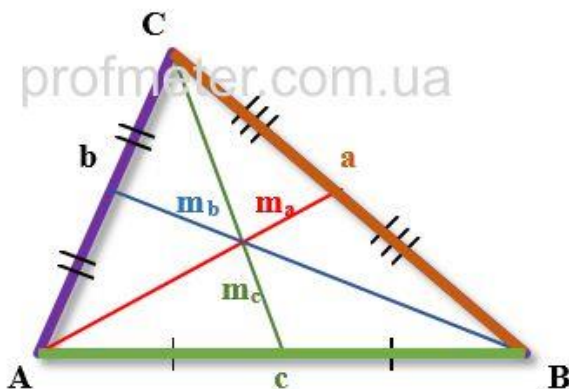


$$l = \sqrt{ac - mn}$$

$$l = \frac{2ac \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{a + c}$$

$$l = \frac{\sqrt{ac(a+c+b)(a+c-b)}}{a+c}$$

11) Длина медианы



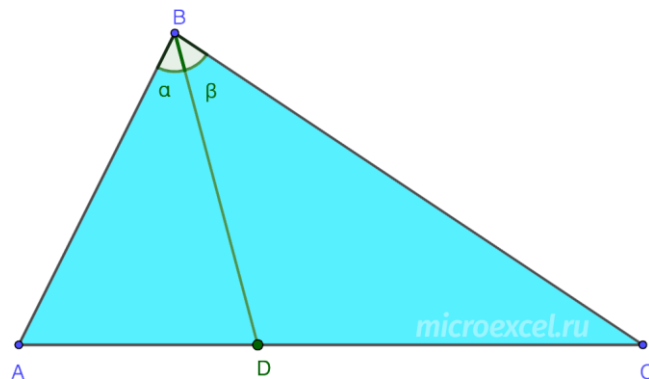
$$[1] m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

$$[2] m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

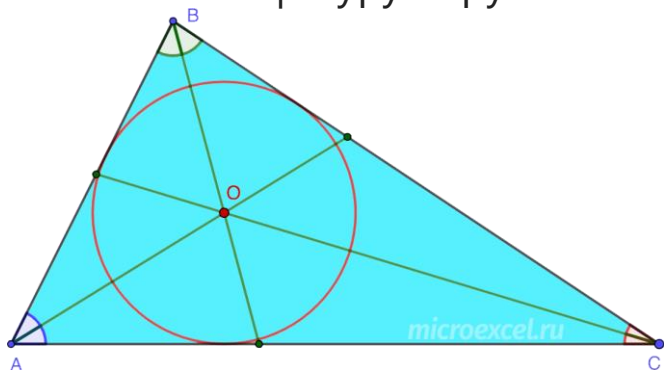
13) Теорема о биссектрисе.

Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону в пропорции, равной отношению прилежащих к данному углу сторон. Т.е. для нашего треугольника:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AB} \text{ или } \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB}$$



14) Точка пересечения трех внутренних биссектрис любого треугольника (называется **инцентром**) является центром вписанной в фигуру окружности.



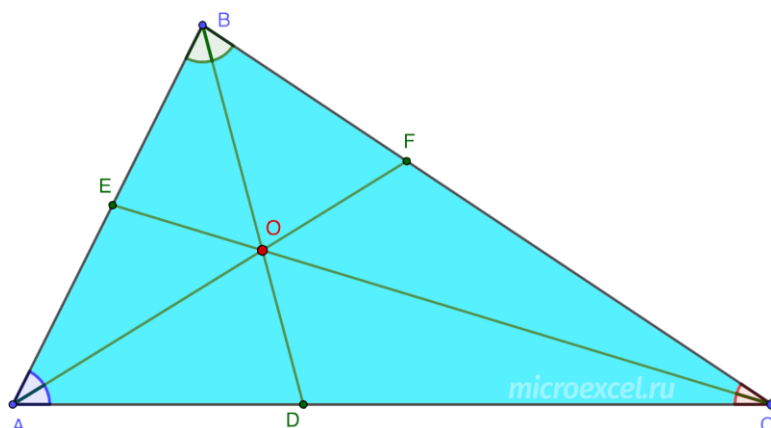
15) Все биссектрисы треугольника в точке пересечения делятся в отношении, равном сумме прилежащих к углу

сторон, деленной на противоположную сторону (считая от вершины).

$$\frac{BO}{OD} = \frac{AB + BC}{AC}$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{AC + BC}{AB}$$

$$\frac{AO}{OF} = \frac{AB + AC}{BC}$$



16) Теорема Менелая

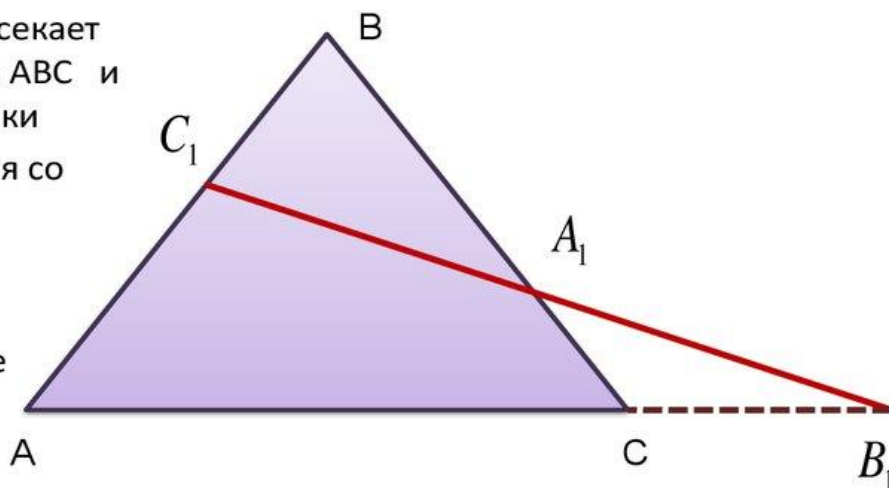
Теорема Менелая (теория).

Теорема:

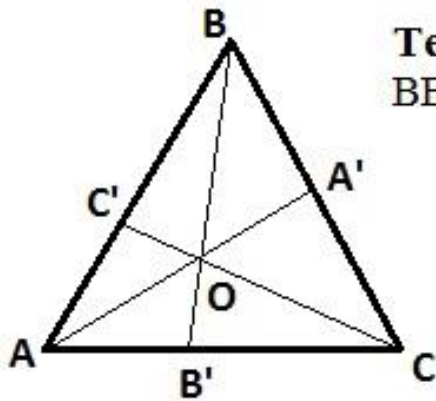
Пусть некоторая прямая пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. Точки A_1, B_1, C_1 это пересечения со сторонами BC, AC, AB или их продолжениями соответственно.

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



17) Теорема Чевы



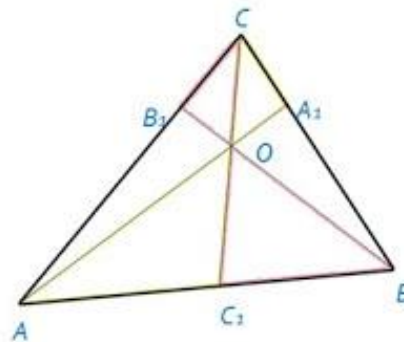
Теорема Чевы. Если в треугольнике ABC отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке O, то

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

18) Теорема Ван-Обеля

Теорема Ван-Обеля

- Пусть на сторонах AB, BC и AC взяты соответственно точки C₁, A₁ и B₁. Если прямые AA₁, BB₁ и CC₁ пересекаются в точке O, то имеет место равенство



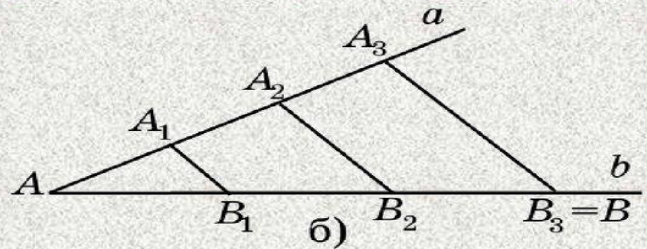
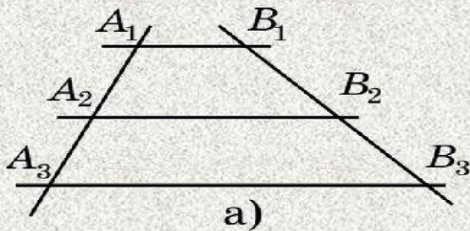
$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$$

MyShared

19) Теорема Фалеса

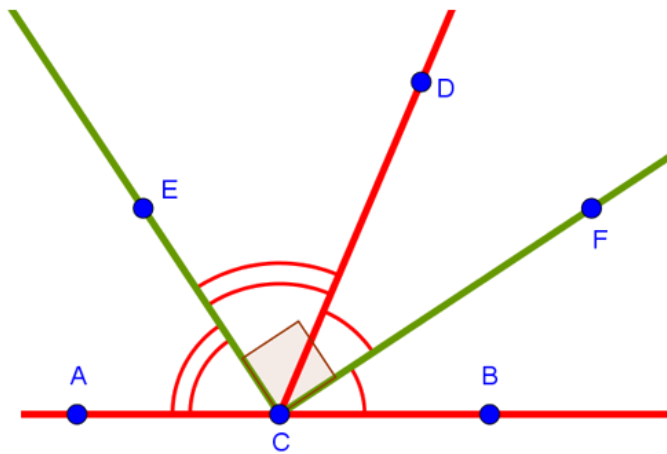
Теорема Фалеса

Теорема. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (рис. а).



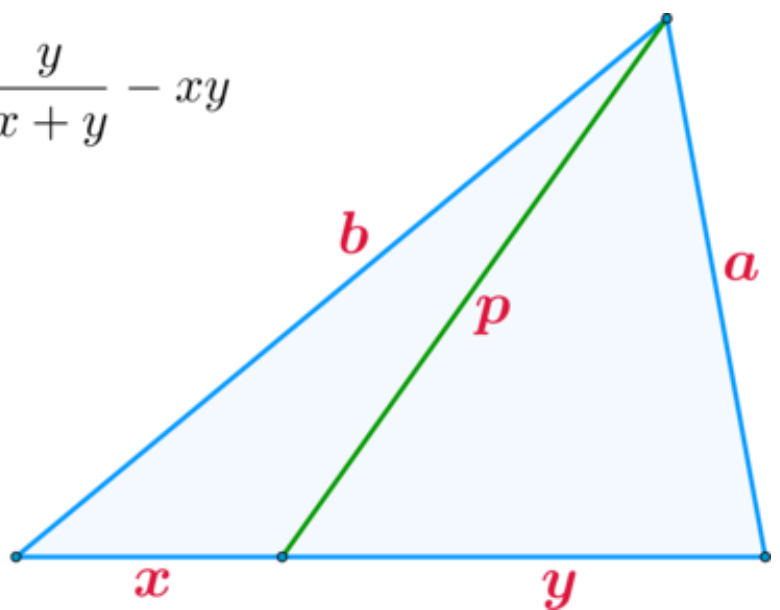
Теорему Фалеса можно применять для деления отрезка на n равных частей (рис. б).

20) Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.



21) Теорема Стюарта

$$p^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$$



Где p - это чевиана.

Из теоремы Стюарта можно легко вывести длину медианы и длину биссектрисы самим.

21) Формулы площадей треугольника

Обозначения:

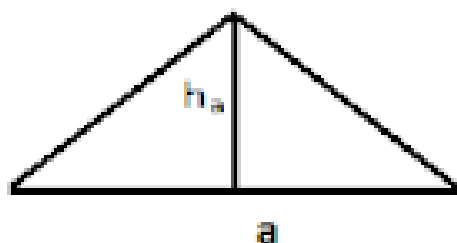
h_a - высота, проведенная к стороне a .

R - радиус описанной окружности.

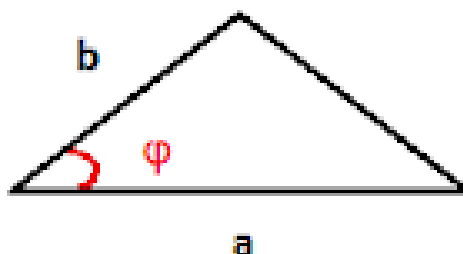
r - радиус вписанной окружности.

p - полупериметр, т.е. половина от суммы всех сторон треугольника.

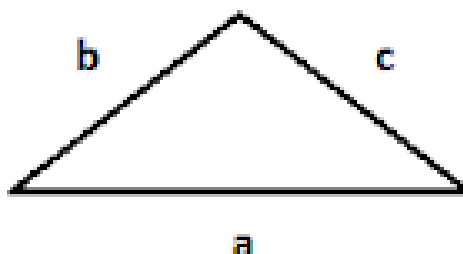
- $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$



- $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \varphi$



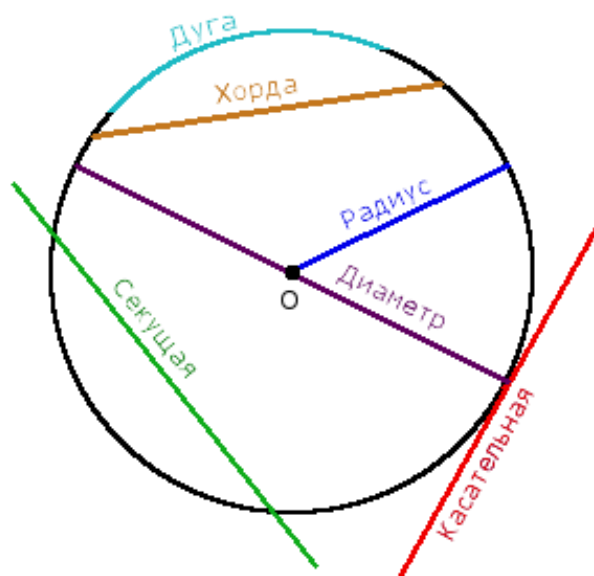
- $S = \frac{abc}{4R}$



- $S = p \cdot r$

- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

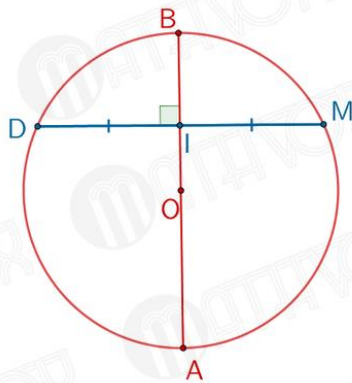
Окружность



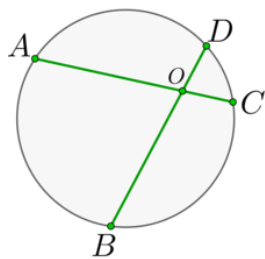
1) Вписанные и центральные углы

	Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу. <i>И т.к. центральный угол измеряется градусной мерой дуги, на которую опирается, то вписанный угол равен половине этой дуги</i>
	Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны
	Угол, опирающийся на диаметр, - прямой.

2) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и дуги, которые она стягивает **пополам**.



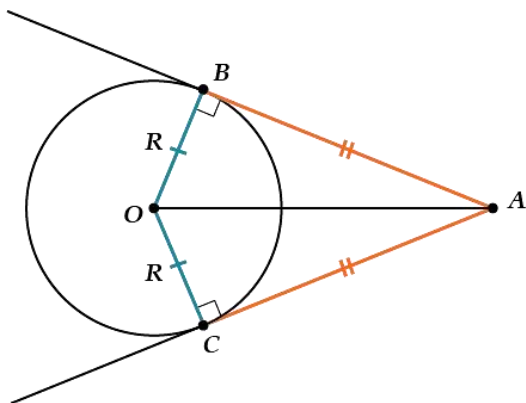
3) Если хорды окружности пересекаются в точке O, то произведение отрезков хорд, на которые они делятся точкой O равны между собой.



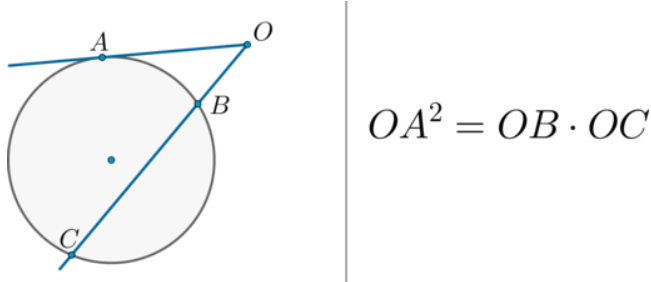
$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

4.1) Касательная к окружности всегда перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

4.2) Отрезки **касательных** к окружности, **проведенных из одной точки**, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту **точку** и центр окружности.

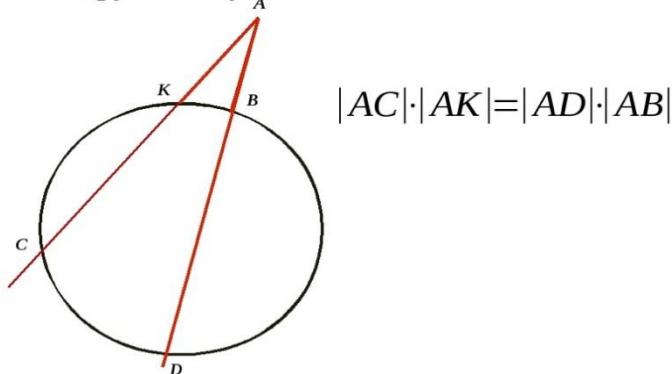


5) Если из данной точки проведена касательная и секущая, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению всего отрезка секущей на его внешнюю часть.



6) Теорема о секущих

Теорема: Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть.

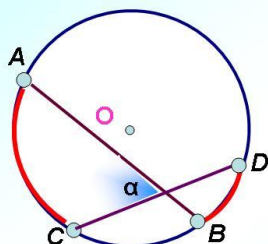


7) Два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же хорду, в сумме составляют 180 градусов, если их вершины лежат по разные стороны от этой хорды.

8) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, равны, если их вершины лежат по одну сторону от этой хорды.

9)

Угол между двумя
пересекающимися хордами

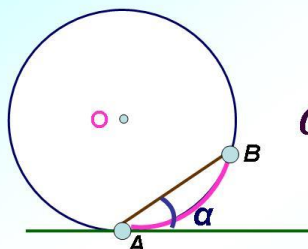


$$\alpha = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$$

Угол между двумя пересекающимися хордами измеряется полусуммой заключенных между ними дуг

10)

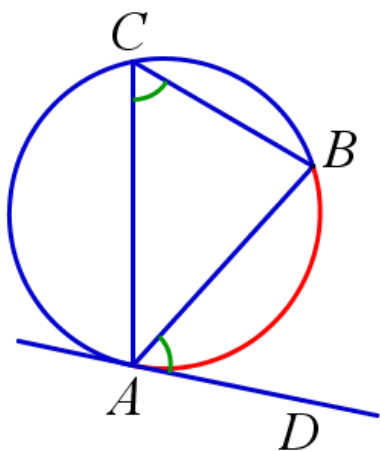
Угол между
касательной и хордой



$$\alpha = \frac{1}{2} \cup AB$$

Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной заключенной в нем дуги

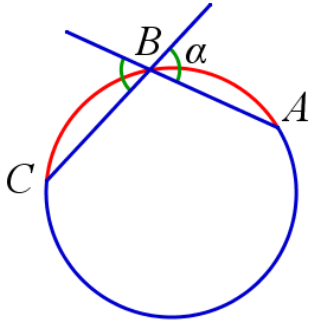
11) Если вписанный угол и угол, образованный касательной и хордой, отсекает на окружности одну и ту же дугу, то они равны.



$$\angle ACB = \angle DAB$$

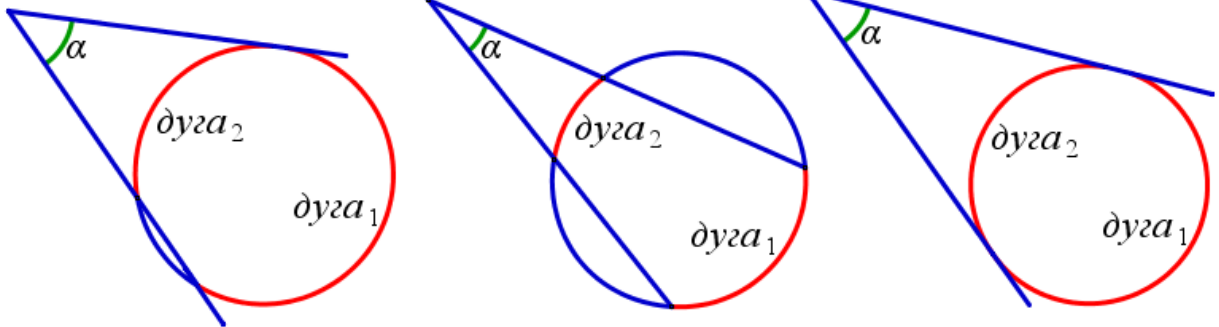
12) Угол с вершиной на окружности

Пусть вершина угла принадлежит окружности, а одна из его сторон и продолжение другой стороны пересекают окружность. Тогда градусная мера этого угла равна полусумме градусных мер дуг, которые он вместе с вертикальным ему углом высекают на окружности.



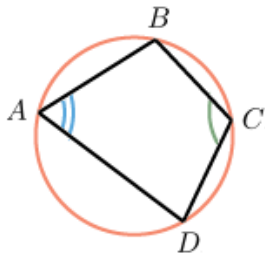
$$\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{BC})$$

13) Если вершина угла лежит вне круга, а каждая сторона пересекает круг или касается его, то градусная мера этого угла равна полуразности градусных мер дуг, которые он высекает на окружности.



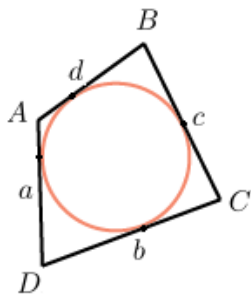
$$\alpha = \frac{1}{2}(\text{дуга } 1 - \text{дуга } 2)$$

14)



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

Четырёхугольник можно **вписать** в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180° .

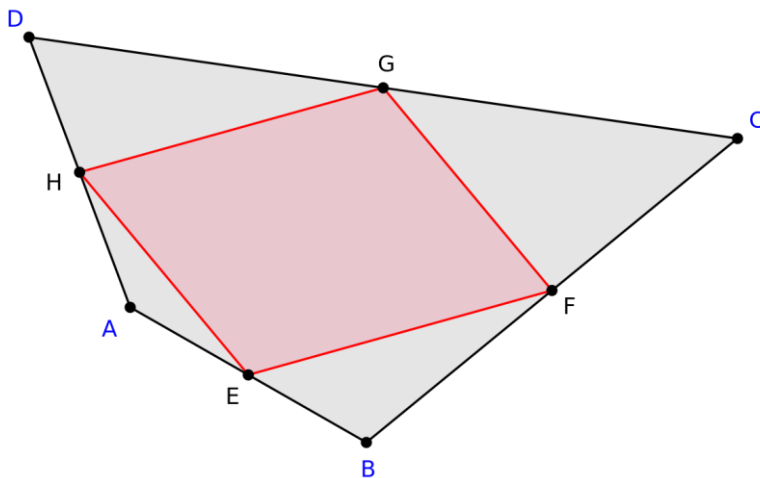


$$a + c = b + d$$

Четырёхугольник можно **описать** вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

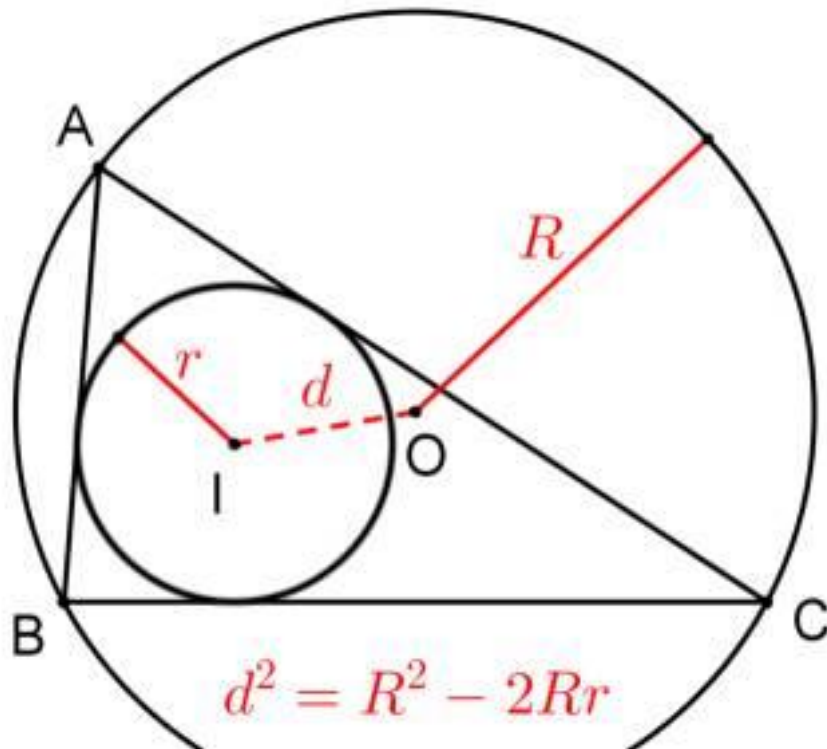
15) Теорема Вариньона

Теорема Вариньона — геометрический факт, доказанный Пьером Вариньоном и утверждающий, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма: Параллелограмм, образованный серединами сторон, иногда называется вариньоновским или вариньоновым.



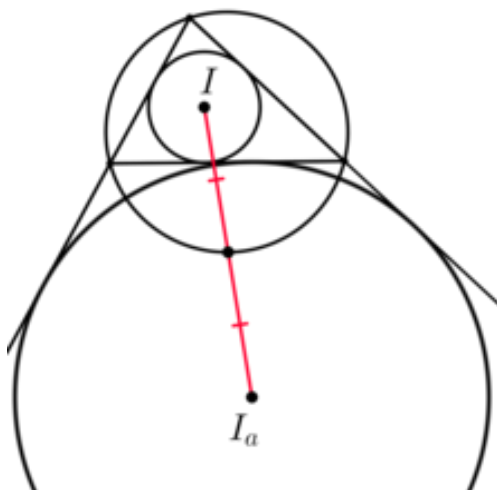
16) Теорема Эйлера

Расстояние между центрами описанной или вписанной окружности вокруг любого треугольника, равно разнице квадрата радиуса описанной окружности и удвоенного произведения радиуса вписанной и описанной окружности.



17) Теорема Мансиона

Описанная около треугольника окружность, делит отрезок, соединяющий центры вписанной и внеписанной окружности, пополам.

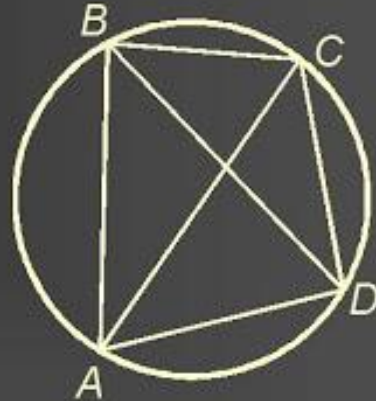


18) Теорема Птолемея

Теорема Птолемея

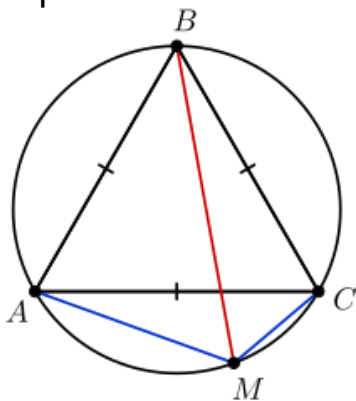
Во вписанном
четырёхугольнике
произведение
диагоналей равно
сумме произведений
его
противоположных
сторон.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



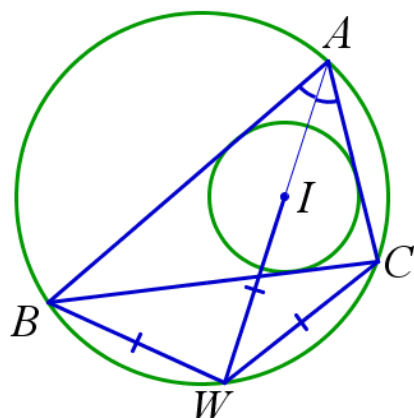
19) Теорема Помпею

Пусть дан равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Тогда для любой точки этой окружности расстояние от неё до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний до двух остальных вершин.



$$AM + MC = BM$$

20) Лемма о трилистнике (трезубце) или лемма Мансиона



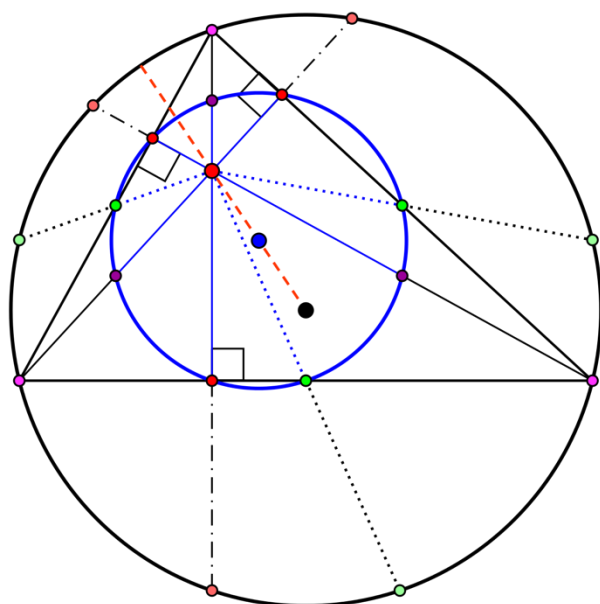
Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W . Пусть I - центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Тогда выполняется равенство:
 $BW=WI=WC$

21) Теорема Штейнера-Лемуса

Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

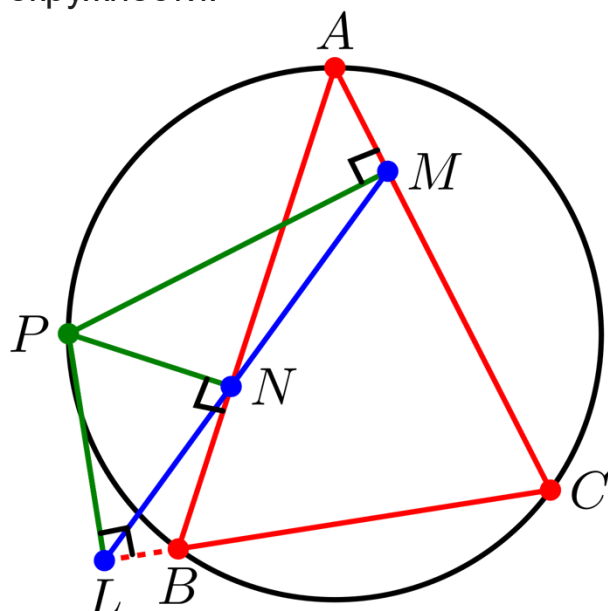
22) Окружность 9 точек

Основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной окружности.



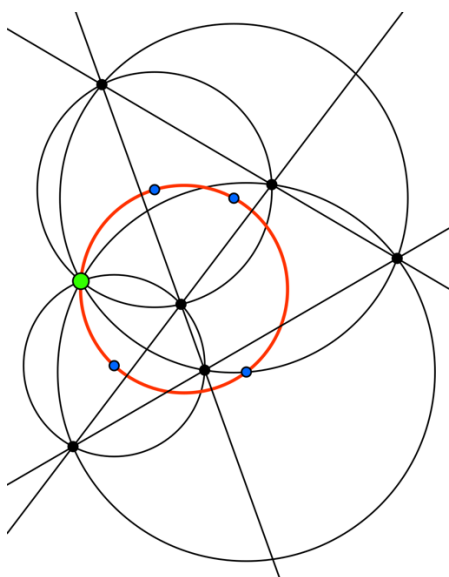
23) Прямая Симсона

Прямая Симсона — прямая, проходящая через основания перпендикуляров на стороны треугольника из точки на его описанной окружности.

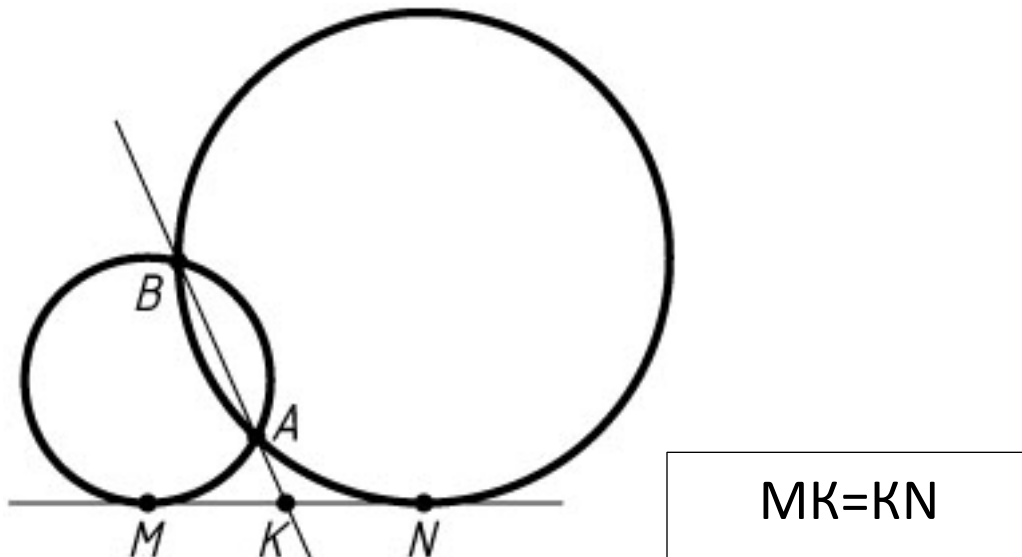


24) Точка Микеля

Пусть четыре прямые расположены так, что при их пересечении образуется четыре треугольника. Тогда описанные вокруг этих треугольников окружности имеют общую точку, которая называется точкой Микеля этой конфигурации прямых.

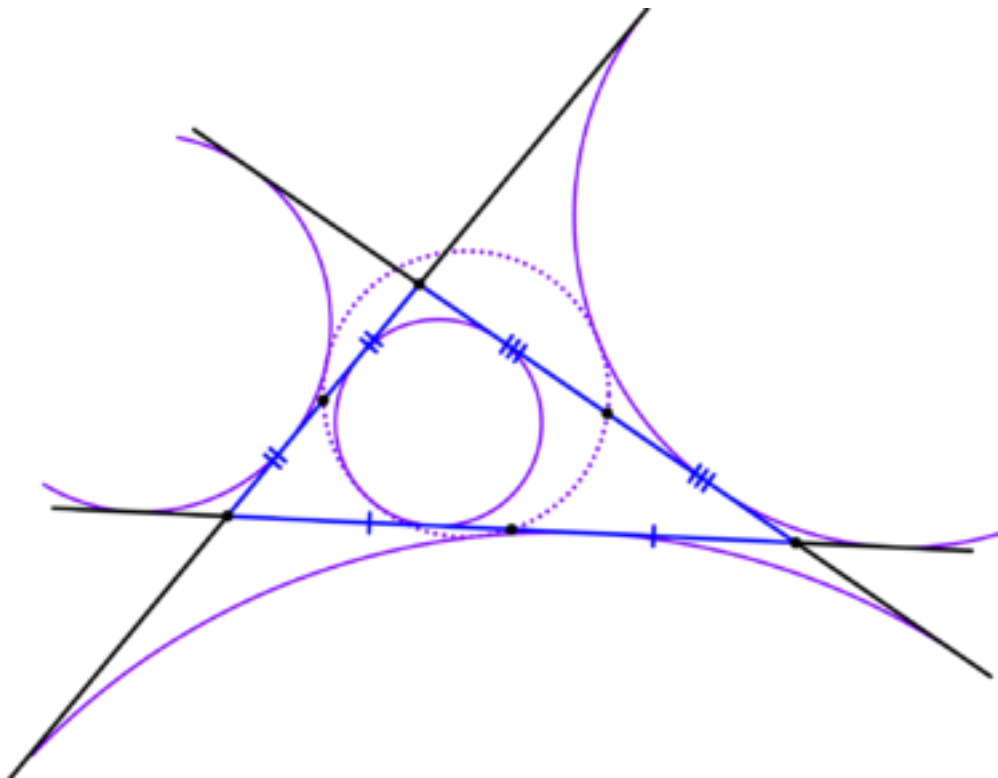


25) Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок из общей касательной, заключённой между точками касания.

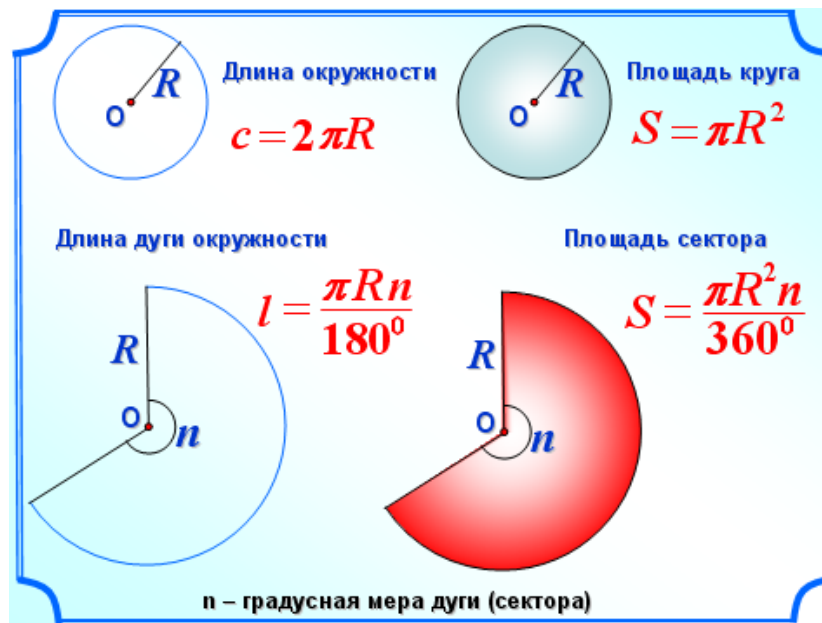


26) Теорема Фейербаха

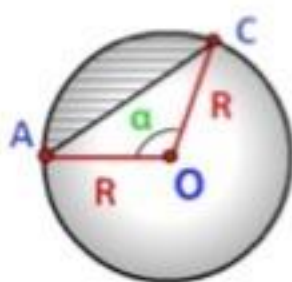
Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трёх внеписанных окружностей этого треугольника.



26)



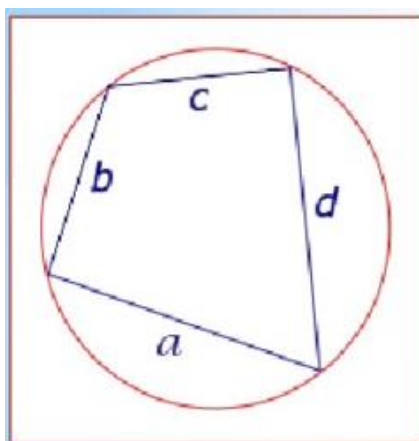
27) Площадь сегмента



$$S = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

Формула для нахождения площади сегмента круга.

28) Формула Брахмагупты

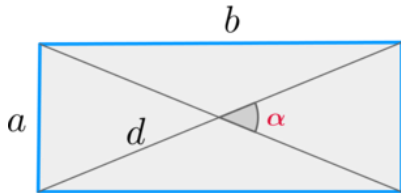


Площадь вписанного в окружность четырёхугольника вычисляется по формуле Брахмагупты.

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

29) Формулы площадей

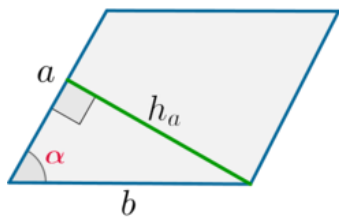
29.1) Прямоугольник



$$1. S = ab$$

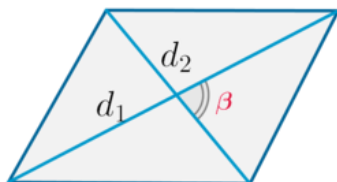
$$2. S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \alpha$$

29.2) Параллелограмм



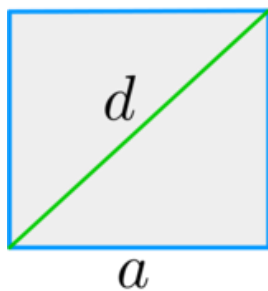
$$1. S = a \cdot h_a$$

$$2. S = ab \cdot \sin \alpha$$



$$3. S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \beta$$

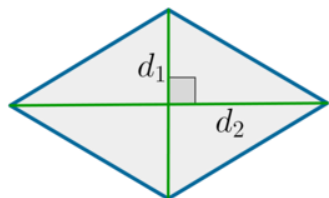
29.3) Квадрат



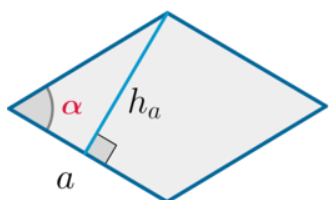
$$1. S = a^2$$

$$2. S = \frac{1}{2} d^2$$

29.4) Ромб



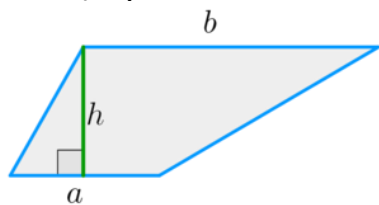
$$1. S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$



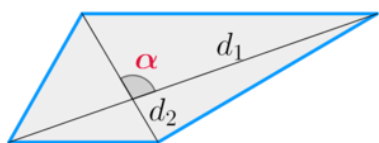
$$2. S = a \cdot h_a$$

$$3. S = a^2 \cdot \sin \alpha$$

29.5) Трапеция

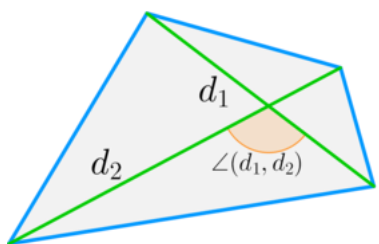


$$1. S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



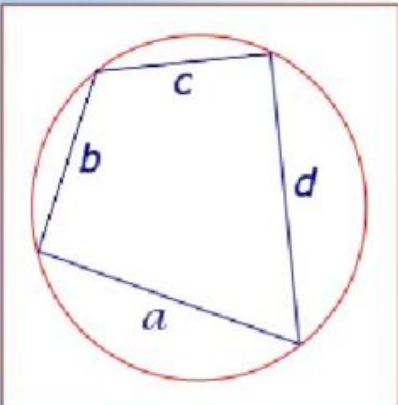
$$2. S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \alpha$$

29.6) Любой выпуклый четырёхугольник



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \angle(d_1, d_2)$$

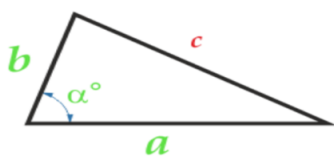
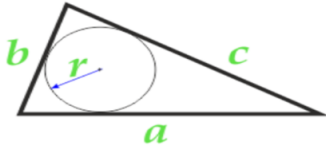
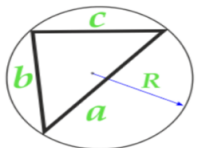
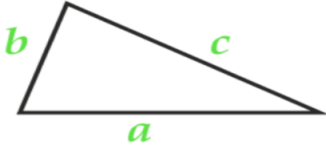
29.7) Вписанный четырёхугольник



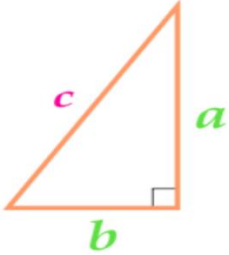
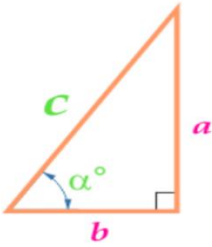
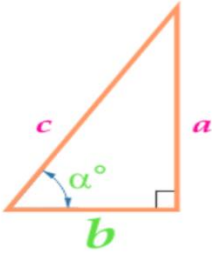
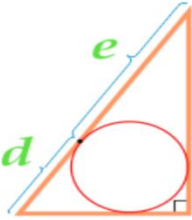
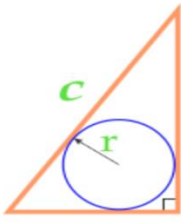
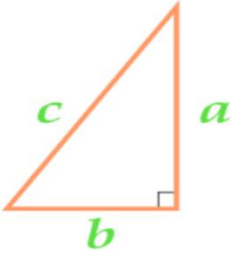
Площадь вписанного в окружность четырёхугольника вычисляется по формуле Брахмагупты.

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

29.8) Площадь любого треугольника

	$S = \frac{1}{2} a \cdot h$
	$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$
	$S = r \cdot \frac{(a + b + c)}{2}$
	$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ где $p = \frac{a+b+c}{2}$
	$S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(180 - (\alpha + \beta))}$

29.9) Площадь прямоугольного треугольника

	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$
	$S = \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sin(2\alpha)$
	$S = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$
	$S = d \cdot e$
	$S = r \cdot (r + c)$
	$S = (p - a) \cdot (p - b)$ где $p = \frac{a + b + c}{2}$

Литература

1. Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации /учебное пособие/ А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, П.И. Захаров, И.Р. Высоцкий, Л.И. Титова; под ред. И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – Москва: Издательство «Интеллект- Центр», 2021. – 296 с.
2. ОГЭ Математика: типовые экзаменационные варианты: О-39 36 вариантов/ под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2021. – 224 с. – (ОГЭ. ФИПИ – школе).
ISBN 978 -5-4454 -1468-1
3. Теоремы и задачи школьной геометрии. Базовый и профильный уровни / Р.К. Гордин; чертежи М.Ю. Панова и др. – 5-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2020. – 96 с.: ил.
ISBN 978-5-4439-4065-6
4. Заочные математические олимпиады /Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 128 с.